講演番号：28

有向グラフ構造を持つ遅延結合ベルヌーイ写像系にカオス同期が生じるための十分条件

N-1

Sufficient Condition for Chaotic Synchronization in Delayed-Coupled Bernoulli Map Networks with Directed Graph

飯塚 哲也　　杉谷 栄規
Tetusya Iizuka　　Yoshiki Sugitani

茨城大学工学部
College of Engineering, Ibaraki University

1　まえがき

同期とは，異なる振動をしている複数の振動体が相互作用によってその振動を揃えることである．実システムでは相互作用に遅延が含まれるため，遅延結合発振器における同期の研究が盛んに行われている．このとき，同期の安定性は遅延を含む線形時変システムの安定性に帰着されるが，その解析は容易でない．先行研究 [1] では，発振器としてベルヌーイ写像系を用いることで，周期の安定性が解析が容易な線形時不変システムに帰着できることを示し，カオス同期のための十分条件を導出した．しかし，[1] ではネットワーク構造が無向グラフに限定されていた．本稿では有向グラフ構造を持つ遅延結合ベルヌーイ写像系にカオス同期を生じさせる十分条件を導出する．

2　遅延結合ベルヌーイ写像系

以下の結合写像ダイナミクスを考える．

$$x_i(n+1) = f[x_i(n)] + \varepsilon u_i(n). \quad (i = 1, \ldots, N) \tag{1}$$

ここで，$x_i(n) \in \mathbb{R}$ と $u_i(n) \in \mathbb{R}$ はそれぞれ時刻 $n \in \mathbb{Z}$ における i 番目の写像の状態と結合信号である．ベルヌーイ写像は，$a > 1$ を写像パラメータとして $f(x) = (ax) \bmod 1$ で表される．$N \in \mathbb{Z}$ は写像の数，$\varepsilon \in [0, 1]$ は結合強度である．結合信号 $u_i(n)$ は

$$u_i(n) = \frac{1}{d_i}\left\{\sum_{j=1}^{N} c_{ij} f[x_j(n-\tau)]\right\} - f[x_i(n)], \tag{2}$$

で与えられる．$x_j(n-\tau)$ は遅延時間 $\tau \in \mathbb{Z}^+$ だけ遅れた状態変数である．$c_{ij} \in \{0, 1\}$ は隣接行列 $\boldsymbol{C}$ の (i, j) 要素，$d_i = \sum_{j=1}^{N} c_{ij}$ は i 番目の写像の入次数である．全写像が同期した状態を $s(n) := x_1(n) = \cdots = x_N(n)$ とすると，同期状態のダイナミクスは

$$s(n+1) = (1-\varepsilon) f[s(n)] + \varepsilon f[s(n-\tau)], \tag{3}$$

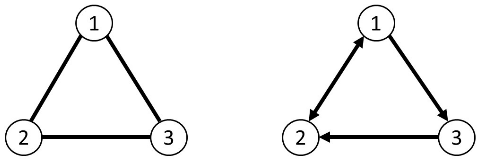
で与えられる．

3　安定性解析

以下の前提条件を満たす有向グラフを仮定する．

> 前提 1:　ネットワークは全域木を有する．
> 前提 2:　入次数が 0 の写像は存在しない．
> 前提 3:　行列 $\boldsymbol{I}_N - \boldsymbol{C}$ は N 個の異なる固有値を持つ．

同期状態（3）からの誤差ダイナミクスは行列 $\boldsymbol{I}_N - \boldsymbol{C}$ の固有値 $\rho_q (q = 1, 2, \ldots, N)$ を用いると次式で与えられる．



(a) 無向グラフ　(b) 有向グラフ

図 1　ネットワーク構造の例

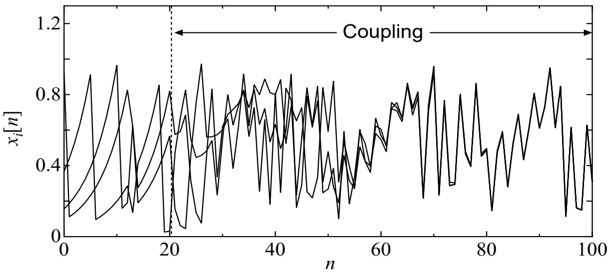


図 2　図 1（b）の構造での時系列データ（$a = 1.2$，$\varepsilon = 0.8$，$\tau = 2$）

$$\boldsymbol{\xi}_q(n+1) = \left[\begin{array}{cc:c} (1-\varepsilon)a & \boldsymbol{0}_{\tau-1}^T & \varepsilon(1-\rho_q)a \\ \hdashline \multicolumn{2}{c:}{\boldsymbol{I}_\tau} & \boldsymbol{0}_\tau \end{array}\right] \boldsymbol{\xi}_q(n). \tag{4}$$

ここで，$\boldsymbol{\xi}_q(n) = [\xi_q(n)\ \xi_q(n-1)\ \cdots\ \xi_q(n-\tau)]^T$，$\boldsymbol{0}_m$ は $(m \times 1)$ の零行列である．遅延時間 τ とは無関係に式（4）が安定となる十分条件は

$$1 < a < \frac{1}{1 + \varepsilon(Q-1)}, \tag{5}$$

と導出できる．ただし，$Q = \max_{q \neq 1} |1 - \rho_q|$ である．

4　シミュレーション

図 1（b）の有向グラフを考える．$Q = \sqrt{2}/2$ より，式（5）の不等式を満たすように $a = 1.2$，$\varepsilon = 0.8$ と設計した．設計パラメータを用いた時系列が図 2 である．$\tau = 2$ とした．結合後 $(n = 20)$，カオス同期が発生している．

5　まとめ

有向グラフ構造を持つベルヌーイ結合写像の同期の安定性解析を行い，カオス同期を引き起こす十分条件を導出した．

参考文献

[1] Y. Sugitani et. al, Nonlinear Theory and Its Applications, IEICE, vol. 8, no. 2, pp. 162–172, 2017.