講演番号：52

円周上の max-min 5-dispersion 問題

D–1

Max-Min 5-dispersion Problem on a Circle

角田 倫久　　宮田 洋行　　中野 眞一
Riku TSUNODA　　Hiroyuki MIYATA　　Shinichi NAKANO
群馬大学理工学部電子情報理工学科
Department of Computer Science, Gunma University

1　まえがき

施設の配置候補点の集合が与えられたときに, 指定した個数の施設を互いに離して配置する問題を一般に dispersion 問題という. 例えば, 消防署は, 互いに離して配置することが望ましい. dispersion 問題の多くは NP 困難であり [1], 多項式時間のアルゴリズムを設計することは難しいと思われる. 本論文では, 与えられた点の集合が円周上にある場合の dispersion 問題について考察する. 円周上の n 個の施設の配置候補点の集合を $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ とする.

円周上の max-min k-dispersion 問題を, path partition 問題に帰着してからこれを解く $O(n)$ 時間の複雑なアルゴリズムがある [2]. このアルゴリズムは, $O(n)$ 時間の matrix search 問題を解くアルゴリズム [3] をサブルーチンとして用いており, 実装は非常に困難である.

特に, $k = 3$ のとき, 円周上の max-min 3-dispersion 問題を解く $O(n)$ 時間の簡単なアルゴリズムがある [4]. また, $k = 4$ のとき, 円周上の max-min 4-dispersion 問題を解く $O(n)$ 時間の簡単なアルゴリズムがある [5]. 本文は, 円周上の max-min 5-dispersion 問題を解く $O(n)$ 時間のアルゴリズムを設計する.

2　準備

$P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ を円周上の点の集合とし, これらは円周上に時計回りにこの順に現れるとする. $n \geq 5$ とする. P の 5-dispersion を $S = \{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\} \subset P$ とする. $q_1, q_2, \ldots$ は円周上に時計回りにこの順で現れるとする. $q_1 = p_i$ とする. L は円周の長さとする.

事実 1: $d(q_1, q_2), d(q_2, q_3), d(q_3, q_4), d(q_4, q_5), d(q_5, q_1)$ のいずれかは $\frac{L}{5}$ 以上である.

一般性を失うことなく $d(q_5, q_1) \geq \frac{L}{5}$ とする. q_1 から時計回りに $\frac{4L}{5}$ 進んだ点を b とする.

事実 2: q_5 は区間 $(q_1, b]$ 中の P の点で, b に一番近い点としてよい.

円周の区間 (b, q_1) を削除し, 残りの部分を各点の距離を保つように直線分に変形しよう. 図 1 参照. このとき, S は直線上の点集合 $P_i = \{p_i = q_1, p_{i+1}, p_{i+2}, \ldots, p_j = q_5\}$ の 5-dispersion である. 点集合 P_i の 5-dispersion を求める問題を $P(i)$ としよう. 各点 $p_i \in P$ について, 問題 $P(i)$ の 5-dispersion S を求め, これらのうち最も $cost(S)$ が大きい S を選べば, 円周上の点集合 P の 5-dispersion となる.

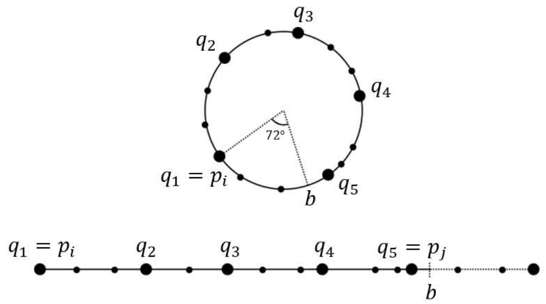

図 1: 直線分への変形

3　提案するアルゴリズム

各 i について, 問題 $P(i)$ の 5-dispersion S を" 独立" に計算して, これらの中から $cost(S)$ が最大のものを計算すれば, これが max-min 5-dispersion 問題の解となる. 計算時間は $O(n^2)$ となる. 次の定理がいえる.

定理 1　円周上の max-min 5-dispersion 問題の解は $O(n)$ 時間で計算できる.

証明. 各 $i = 1, 2, \ldots, n$ について, 問題 $P(i+1)$ の解を $P(i)$ の解から高速に計算できる. (詳細略) これにより合計で $O(n)$ 時間しかかからない. □

4　むすび

P が円周上の点集合のとき, P の 5-dispersion を求める問題を $O(n)$ 時間で解く簡単なアルゴリズムを設計した.

参考文献

[1] S. S. Ravi, 他, "Heuristic and special case algorithms for dispersion problems, " Oper. Res. , vol. 42, pp. 299-310, 1994.

[2] K. H. Tsai, 他, "Optimal algorithms for circle partitioning," Proc. COCOON 1997, LNCS 1276, pp.304-310, 1997.

[3] G. Frederickson, "Optimal algorithms for tree partitioning," Proc. SODA 1991, pp.168-177, 1991.

[4] T. Akagi, 他, "Max-min dispersion problems", Proc. FAW 2018, LNCS 10823, pp.263-272, 2018.

[5] 四家, 佐藤, 宮田, 中野, "円周上の max-min 4-dispersion 問題", 電子情報通信学会論文誌 D, Vol. J102D, No.10, pp.670-673, 2019.

Copyright © 2020 IEICE