講演番号：138

2 つの平面代数曲線の交点計算の改良

D–1 An Improvement of Intersection Computation of Two Plane Algebraic Curves

渡部 嵐 † 菊地 充彦 † 重原 孝臣 †
Arashi WATANABE† Mitsuhiko KIKUCHI† Takaomi SHIGEHARA†
† 埼玉大学大学院理工学研究科
† Guraduate School of Science and Engineering, Saitama University

1 はじめに

一般に、$\lambda\mu$ 平面における n 次の平面代数曲線

$$p(\lambda,\mu)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}\alpha_{ij}\lambda^i\mu^j=0 \quad (\alpha_{ij}\in\mathbf{R}) \tag{1}$$

は n 次以上の複素正方行列 $A,B,C\in\mathbf{C}^{N\times N}$ $(N\geq n)$ を用いて $p(\lambda,\mu)=|\lambda A+\mu B+C|$ の形に行列式表示できることが知られている [1]。したがって、2 つの平面代数曲線の交点を求める問題は二値固有値問題 (2EP) と等価であり、[2] の方法に従えば、2EP の解は連立一般固有値問題 (CGEP) の解として数値的に求めることができる。

[3] では、(1) において $N=n(n+1)/2$ 次の実正方行列を用いた行列式表示が提案されているが、この方法で 2 つの平面代数曲線の交点を計算すると、交点自体が求まらない、ないしは、求まっても精度が低下することが多い。本研究では、$n=2,3$ の場合について、(1) において $N=n$ とする行列式表示の方法を提案し、これを用いると精度低下を軽減できることを示す。

2 3 次曲線の 3 次の行列式表示

(1) において $n=3$ とする。簡単のため、λ についての 3 次方程式 $p(\lambda,0)=0$ は相異なる非零の 3 根を持つと仮定する。この仮定より、$\alpha_{00}=1$ として一般性は失われない。このとき、以下の方法で、3 次の行列式表現

$$p(\lambda,\mu)=|\lambda A+\mu B+E| \tag{2}$$

が得られる。ここで、$A=\mathrm{diag}(a_1,a_2,a_3)$ は複素対角行列、B は複素対称行列 $(b_{ij}=b_{ji})$、E は単位行列である。

まず、(2) において λ^i $(i=0,1,2,3)$ の項の係数比較を行い、a_1,a_2,a_3 が定まる。仮定より、これらは相異なる非零の数になる。次に、(2) において $\lambda^i\mu$ $(i=0,1,2)$ の項の係数比較を行い、B の対角成分 b_{11},b_{22},b_{33} が定まる (a_1,a_2,a_3 が相異なることより、これらは一意に定まる)。次に、(2) において $\lambda^i\mu^2$ $(i=0,1)$ の項の係数比較を行い、$(1,1,1)^T$, $(a_1,a_2,a_3)^T$ が線形独立であることを用いると、B の 3 つの非対角成分の 2 乗は常に媒介変数 t を用いて $b_{ij}^2=p_{ij}t+q_{ij}$ $(i<j)$ の形に書けることが示せる。最後に、この結果を $|B|=\alpha_{03}$ に代入して t を定めることで B の非対角成分も決定できる (t は一意ではない)。

2 次曲線の 2 次の行列式表示はより簡単な方法で求めることができる。

3 数値実験

以下に、

$P_1:(-237.9175716271, 373.4206215961),$
$P_2:(-192.7494515499, 176.7190198187),$
$P_3:(-93.8368732551, 273.3924435784),$
$P_4:(315.8119367636, 265.9196736887),$
$P_5:(332.0510423033, 22.2841051994),$
$P_6:(388.3684899943, 281.3794034443)$

を交点にもつ 2 次曲線 C_1 および 3 次曲線 C_2 の交点を倍精度演算を用いて数値的に求めた例を示す。CGEP の数値解は [4] の方法で求める。

C_1, C_2 の各々について [3] の行列式表示を用いて交点を求めると、P_3,P_5,P_6 は求まらず、また

$P_1:(-17529.5912487537, 1059.0909511279),$
$P_2:(-150.9817742920, 166.2689210017),$
$P_4:(328.6265910131, 225.6103662500)$

となり、各点とも大きな誤差が生じていることがわかる。他方、C_1, C_2 の各々について前節で述べた行列式表示を用いて交点を求めると、

$P_1:(-237.9175716434, 373.4206216059),$
$P_2:(-192.7494515493, 176.7190198194),$
$P_3:(-93.8368732702, 273.3924435897),$
$P_4:(315.8119367056, 265.9196736751),$
$P_5:(332.0510423026, 22.2841052007),$
$P_6:(388.3684900431, 281.3794034534)$

となり、全ての交点が $10^{-7\sim8}$ 程度の相対誤差で求まっていることがわかる。

参考文献

[1] A. C. Dixon: “Note on the reduction of a ternary quartic to a symmetrical determinant”, Proc. Cambridge Philos. Soc. 2, pp.350–351, 1902.

[2] F. V. Atkinson: “Multiparameter eigenvalue problems”, Academic Press, NewYork, 1972.

[3] A. Muhič, B. Plestenjak: “On the singular two-parameter eigenvalue problem”, Electron. J. Linear Algebra 18, pp.420–437, 2009.

[4] Y. Kakinuma et al.: “Algorithm for computing Kronecker basis”, JSIAM Letters, Vol. 1, pp.60–63, 2009.